Polos Olímpicos de Treinamento

Curso de Teoria dos Números - Nível 2

Prof. Samuel Feitosa

Aula 8

Equações Diofantinas I

Exemplo 1. *Em Gugulândia, o jogo de basquete é jogado com regras diferentes. Existem apenas dois tipo de pontuações para as cestas: 5 e 11 pontos. É possível um time fazer 39 pontos em uma partida?*

Sejam x e y os números de cestas de 5 e 11 pontos, respectivamente. O problema se resume em descobrirmos se existem inteiros não negativos x e y tais que $5x + 11y = 39$. Ao invés de testarmos os valores de x e y, somemos $11 + 5$ em ambos os lados da equação:

$$5(x + 1) + 11(y + 1) = 55.$$

Como $5 \mid 55$ e $5 \mid 5(x + 1)$, segue que $5 \mid 11(y + 1)$ e, com mais razão, $5 \mid y + 1$ pois $mdc(5, 11) = 1$. Do mesmo modo, $11 \mid x + 1$. Assim,

$$55 = 5(x + 1) + 11(y + 1) \geq 5 \cdot 11 + 11 \cdot 5 = 110,$$

pois $x + 1, y + 1 \geq 1$. Obtemos uma contradição.

Exemplo 2. *Qual o menor inteiro positivo m para o qual todo número maior que m pode ser obtido como pontuação no jogo de basquete mencionado anteriormente?*

Como já sabemos que 39 não é possível, é natural começarmos procurando os números maiores que 39 que não podem ser pontuações. Veja que:

$$\begin{aligned}
40 &= 5 \cdot 8 + 11 \cdot 0 \\
41 &= 5 \cdot 6 + 11 \cdot 1 \\
42 &= 5 \cdot 4 + 11 \cdot 2 \\
43 &= 5 \cdot 2 + 11 \cdot 3 \\
44 &= 5 \cdot 0 + 11 \cdot 4
\end{aligned}$$

Ao somarmos 5 a cada uma dessas representações, obteremos representações para os próximos 5 números. Repetindo esse argumento, poderemos escrever qualquer número maior que 39 na forma $5x + 11y$ com x e y inteiros não negativos. Concluímos assim que $m = 39$. Poderíamos mostrar que todo número maior que 44 é da forma $5x + 11y$ com x e y inteiros não negativos de outro modo. Se $n > 44$, considere o conjunto:

$$n - 11 \cdot 0, n - 11 \cdot 1, n - 11 \cdot 2, n - 11 \cdot 3, n - 11 \cdot 4.$$

Como $mdc(11, 5) = 1$, o conjunto anterior é um sistema completo de restos módulo 5 e consequentemente existe $y \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ tal que

$$n - 11 \cdot y = 5x$$

Como $n > 44$, segue que $x > 0$.

Exemplo 3. *Quais e quantos são os inteiros positivos n que não podem ser obtidos como pontuação nesse jogo de basquete?*

Precisaremos relembrar um teorema da aula 03:

Teorema 4. *(Bachet-Bèzout) Se $d = mdc(a, b)$, então existem inteiros x e y tais que*

$$ax + by = d.$$

A primeira observação que fazemos é que uma vez encontrados inteiros x e y, qualquer múltiplo de d pode ser representado como uma combinação linear de a e b:

$$a(kx) + b(ky) = kd.$$

Isso é particularmente interessante quando $mdc(a, b) = 1$, onde obtemos que qualquer inteiro é uma combinação linear de a e b. Veja que isso não entra em conflito com os exemplos anteriores pois os inteiros x e y mencionados no teorema podem ser negativos.

A próxima propopsição conterá o que procuramos:

Proposição 5. *Todo inteiro positivo k pode ser escrito(de modo único) de uma e, somente uma, das seguintes formas:*

$$11y - 5x, \ \ \textit{ou} \ \ 11y + 5x, \ \ \textit{com} \ \ 0 \le y < 5 \ \ \textit{e} \ \ x \le 0$$

Pelo teorema de Bachet-Bèzout, existem m e n tais que $5m + 11n = 1$. Sejam q e r o quociente e resto da divisão de kn por 5, i.e., $kn = 5q + r$, $0 \le r < 5$. Assim,

$$\begin{aligned} k &= 5(km) + 11(kn) \\ &= 5(km) + 11(5q + r) \\ &= 5(km + 11q) + 11r. \end{aligned}$$

Basta fazer $x = km + 11q$ e $r = y$.

Para ver a unicidade, suponha que $11m \pm 5n = 11a \pm 5b$ com $0 \leq m, a < 5$. Então $11(m-a) = 5(\pm b \pm n)$. Usando que $mdc(11, 5) = 1$, segue que $5 \mid m - a$. A única opção é termos $m = a$ pois o conjunto $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ é um **scr**. Consequentemente $\pm 5n = \pm 5b$ e $n = b$.

Sendo assim, os elementos do conjunto

$$B(5, 11) = \{11y - 5x \in \mathbb{Z}_{+}^{*}; 0 \leq y < 5 \text{ e } x > 0\}$$

constituem o conjunto das pontuações que não podem ser obtidas. Seus elementos são:

$$\begin{aligned}
y = 1 \quad &\Rightarrow \quad 11y - 5x = 1, 6 \\
y = 2 \quad &\Rightarrow \quad 11y - 5x = 2, 7, 12, 17 \\
y = 3 \quad &\Rightarrow \quad 11y - 5x = 3, 8, 13, 18, 23, 28 \\
y = 4 \quad &\Rightarrow \quad 11y - 5x = 4, 9, 14, 19, 24, 29, 34, 39
\end{aligned}$$

A quantidade de tais inteiros é

$$20 = \frac{(5-1)}{2} \cdot \frac{(11-1)}{2}.$$

Vale o resultado geral:

Proposição 6. *Dados os inteiros positivos a e b com $mdc(a, b) = 1$, existem exatamente*

$$\frac{(a-1)}{2} \cdot \frac{(b-1)}{2}$$

números inteiros não negativos que não são da forma $ax + by$ com $x, y \geq 0$.

Provaremos tal resultado em uma aula futura fazendo o uso da função parte inteira.

Exemplo 7. *Suponha agora que as pontuações das cestas do basquete de Gugulândia tenham mudado para a e b pontos com $0 < a < b$. Sabendo que existem exatamente 35 valores impossíveis de pontuações e que um desses valores é 58, encontre a e b.*

Perceba que devemos ter $mdc(a, b) = 1$ pois caso contrário qualquer valor que não fosse múltiplo de $mdc(a, b)$ não seria uma pontuação possível e sabemos que existe apenas um número finito de tais valores. Em virtude da proposição anterior, $(a-1)(b-1) = 2 \cdot 35 = 70$. Analisemos os possíveis pares de divisores de 70 tendo em mente que $a < b$:

$$\begin{aligned}
(a-1)(b-1) &= 1 \cdot 70 \Rightarrow (a, b) = (2, 71) \\
(a-1)(b-1) &= 2 \cdot 35 \Rightarrow (a, b) = (3, 36) \\
(a-1)(b-1) &= 5 \cdot 14 \Rightarrow (a, b) = (6, 15) \\
(a-1)(b-1) &= 7 \cdot 10 \Rightarrow (a, b) = (8, 11)
\end{aligned}$$

Não podemos ter $(a, b) = (2, 71)$ pois $58 = 2 \cdot 29$. Excluindo os outros dois casos em que $mdc(a, b) \neq 1$, temos $a = 8$ e $b = 11$.

A equação $ax + by = c$ é um exemplo de uma equanção diofantina, i.e., uma equação em que buscamos valores inteiros para as variáveis. Tais equações recebem esse nome em homenagem ao matemático grego Diofanto.

Exemplo 8. *Determine todas as soluções inteiras da equação* $2x + 3y = 5$*.*

Por paridade, $3y$ é ímpar, donde $y = 2k + 1$ para algum inteiro k. Daí,

$$x = \frac{5 - 3(2k + 1)}{2} = 1 - 3k,$$

e consequentemente todas as soluções da equação são da forma $(x, y) = (1 - 3k, 2k + 1)$.

Exemplo 9. *Determine todas as soluções inteiras da equação* $5x + 3y = 7$*.*

Analisando agora módulo 3, $5x \equiv 7 \equiv 1 \pmod 3$. Essa condição impõe restrições sobre o resto de x na divisão por 3. Dentre os possíveis restos na divisão por 3, a saber $\{0, 1, 2\}$, o único que satisfaz tal congruência é o resto 2. Sendo assim, x é da forma $3k + 2$ e

$$y = \frac{7 - 5(3k + 2)}{3} = -1 - 5k,$$

consequentemente, todas as soluções da equação são da forma $(x, y) = (3k + 2, -1 - 5k)$.

Notemos que para a solução da congruência $x = 2$, obtemos a solução $(x, y) = (2, 1)$ da equação. Baseado nesses exemplos, é natural imaginarmos que conhecendo uma solução da congruência consigamos descrever todas as outras.

Teorema 10. *A equação* $ax + by = c$*, onde* a, b, c *são inteiros, tem uma solução em inteiros* (x, y) *se, e somente se,* $d = \text{mdc}(a, b)$ *divide* c*. Nesse caso, se* (x_0, y_0) *é uma solução, então os pares*

$$(x_k, y_k) = \left(x_0 + \frac{bk}{d}, y_0 - \frac{ak}{d}\right), \quad k \in \mathbb{Z}$$

são todas as soluções inteiras da equação.

Dada a discussão anterior, resta apenas encontrarmos a forma das soluções. Se (x, y) é outra solução, podemos escrever:

$$\begin{aligned} ax + by &= ax_0 + by_0 \\ a(x - x_0) &= b(y_0 - y) \\ \frac{a}{d}(x - x_0) &= \frac{b}{d}(y_0 - y) \end{aligned}$$

Como $mdc(a/d, b/d) = 1$, temos $b/d \mid x - x_0$ e assim podemos escrever $x = x_0 + bk/d$. Substituindo na equação original obtemos $y = y_0 - ak/d$.

Exemplo 11. *Encontre todas as soluções inteiras da equação* $21x + 48y = 6$

O sitema é equivalente à $7x + 16y = 2$. Uma solução é $(x, y) = (-2, 1)$. Pelo teorema anterior, todas as soluções são da forma:

$$(x_k, y_k) = (-2 + 16k, 1 - 7k).$$

Exemplo 12. *Resolva nos inteiros a equação* $2x + 3y + 5z = 11$

Podemos transformar esse problema isolando qualquer uma das variáveis no problema que já sabemos resolver. Por exemplo, podemos resolver $2x + 3y = 11 - 5z$. Supondo z fixo, podemos encontrar a solução particular $(x, y) = (4 - z, 1 - z)$. Assim, todas as soluções são da forma:

$$(x, y) = (4 - z + 3k, 1 - z - 2k),$$

ou seja, as soluções da equação original são da forma $(x, y, z) = (4 - z + 3k, 1 - z - 2k, z)$ com k e z inteiros.

Vamos estudar agora alguns outros exemplos de equações diofantinas não lineares:

Exemplo 13. *Prove que a equação* $2^n + 1 = q^3$ *não admite soluções* (n, q) *em inteiros positivos.*

É facil ver que a equação não admite soluções se $n = 1, 2, 3$. Assim, podemos supor que $n > 3$. Fatorando, temos:

$$(q - 1)(q^2 + q + 1) = 2^n,$$

e consequentemente $q = 2$ ou $q = 2k + 1$, para algum $k \in \mathbb{N}$. Claramente, $q = 2$ não produz solução. Então $q = 2k + 1$ e $q^3 - 1 = 8k^3 + 12k^2 + 6k$ é uma potência de 2, maior ou igual a 16. Entretanto:

$$8k^3 + 12k^2 + 6k = 2k(4k^2 + 6k + 3),$$

não é uma potência de 2, pois $4k^2 + 6k + 3$ é ímpar. Assim, a equação $2^n + 1 = q^3$ não admite soluções inteiras positivas.

Exemplo 14. *(URSS 1991) Encontre todas as soluções inteiras do sistema* $\begin{cases} xz - 2yt &= 3 \\ xt + yz &= 1. \end{cases}$

Uma boa estratégia será aplicar alguma manipulação algébrica, como somar as equações, multiplicá-las, somar um fator de correção, entre outras para obtermos alguma fatoração envolvendo esses números. Nesse problema, vamos elevar ambas as equações ao quadrado.

$$\begin{cases} x^2z^2 - 4xyzt + 4y^2t^2 &= 9 \\ x^2t^2 + 2xytz + y^2z^2 &= 1. \end{cases}$$

Multiplicando a segunda por dois e somando com a primeira, temos:

$$\begin{aligned} x^2(z^2 + 2t^2) + 2y^2(z^2 + 2t^2) &= 11 \\ (x^2 + 2y^2)(z^2 + 2t^2) &= 11. \end{aligned}$$

Como cada uma das parcelas acima é um inteiro não-negativo, temos dois casos:

$$\begin{cases} x^2 + 2y^2 &= 11 \\ z^2 + 2t^2 &= 1 \end{cases} \Rightarrow (x, y, z, t) = (\pm 3, \pm 1, \pm 1, 0).$$

ou

$$\begin{cases} x^2 + 2y^2 &= 1 \\ z^2 + 2t^2 &= 11 \end{cases} \Rightarrow (x, y, z, t) = (\pm 1, 0, \pm 3, \pm 1).$$

Logo, as únicas soluções possíveis são as quádruplas $(\pm 1, 0, \pm 3, \pm 1)$ e $(\pm 3, \pm 1, \pm 1, 0)$.

Problemas Propostos

Problema 15. *Encontre todas as soluções de* $999x - 49y = 5000$.

Problema 16. *Encontre todos os inteiros* x *e* y *tais que* $147x + 258y = 369$.

Problema 17. *Encontre todas as soluções inteiras de* $2x + 3y + 4z = 5$.

Problema 18. *Encontre todas as soluções inteiras do sistema de equações:*

$$\begin{aligned} 20x + 44y + 50z &= 10 \\ 17x + 13y + 11z &= 19. \end{aligned}$$

Problema 19. *(Torneio das Cidades* 1997*) Sejam a,b inteiros positivos tais que* $a^2 + b^2$ *é divisível por* ab*. Mostre que* $a = b$.

Problema 20. *Encontre uma condição necessária e suficiente para que*

$$x + b_1 y + c_1 z = d_1 \quad e \quad x + b_2 y + c_2 z = d_2$$

tenham pelo menos uma solução simultanea em inteiros x, y, z*, assumindo que os coeficientes são inteiros com* $b_1 \neq b_2$.

Problema 21. *(AMC 1989) Seja* n *um inteiro positivo. Se a equação* $2x + 2y + n = 28$ *tem* 28 *soluções em inteiros positivos* x, y *e* z*, determine os possíveis valores de* n.