Polos Olímpicos de Treinamento

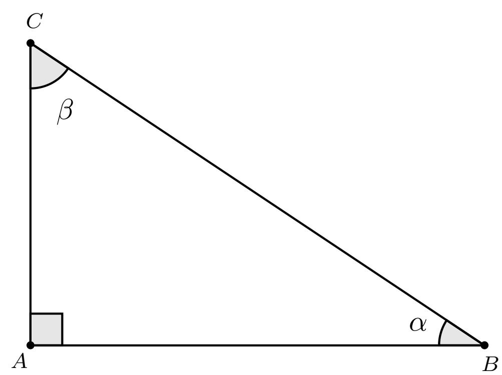
Curso de Geometria - Nível 2

Aula 10

Prof. Cícero Thiago

Relações métricas no triângulo.

1. Seno, cosseno e tangente



$$\text{seno de } \alpha = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{AC}{BC} \Rightarrow \sin\alpha = \frac{AC}{BC}.$$

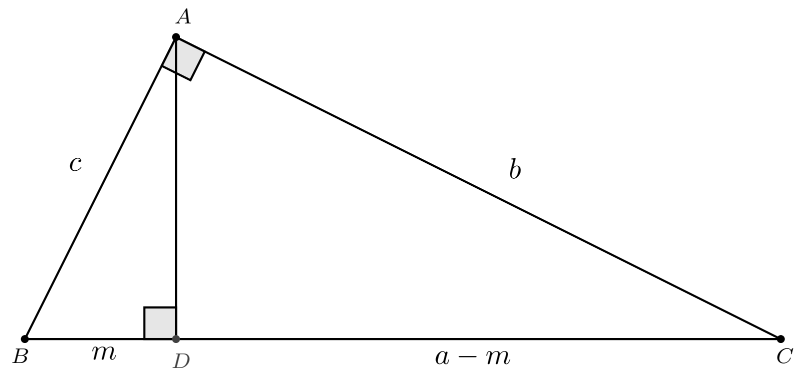
$$\text{cosseno de } \alpha = \frac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{AB}{BC} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{AB}{BC}.$$

$$\text{tangente de } \alpha = \frac{\text{seno de } \alpha}{\text{cosseno de } \alpha} = \frac{\frac{AC}{BC}}{\frac{AB}{BC}} = \frac{AC}{AB} \Rightarrow \tan\alpha = \frac{AC}{AB}.$$

Como $\alpha + \beta = 90^\circ$ é fácil provar que $\sin\alpha = \cos\beta$ e $\cos\alpha = \sin\beta$.

Teorema 1. (Pitágoras) Em um triângulo retângulo a soma dos quadrados dos catetos é igual ao quadrado da hipotenusa.

Demonstração.



1. $\Delta ABD \sim \Delta ABC$

$$\frac{c}{a} = \frac{m}{c} \Leftrightarrow c^2 = a \cdot m$$

2. $\Delta ACD \sim \Delta ABC$

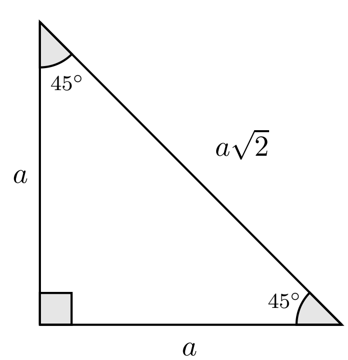
$$\frac{b}{a} = \frac{a-m}{b} \Leftrightarrow b^2 = a \cdot (a-m) = a^2 - a \cdot m$$

Então,

$$c^2 + b^2 = a \cdot m + a^2 - a \cdot m \Leftrightarrow$$
$$c^2 + b^2 = a^2.$$

2. Ângulos notáveis

2.1. $45°$

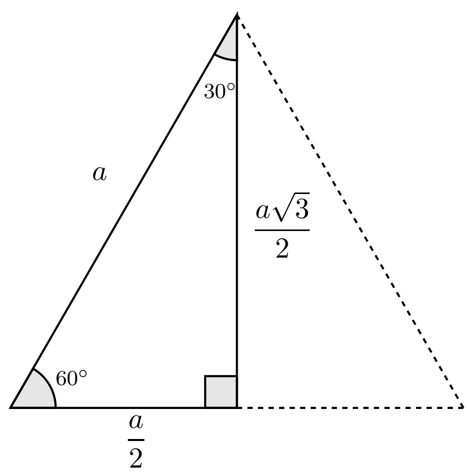


$$\sin 45^\circ = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos 45^\circ = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\tan 45^\circ = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 1.$$

2.2 30° e 60°



$$\sin 30^\circ = \cos 60^\circ = \frac{\frac{a}{2}}{a} = \frac{1}{2}$$

$$\cos 30^\circ = \sin 60^\circ = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan 30^\circ = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

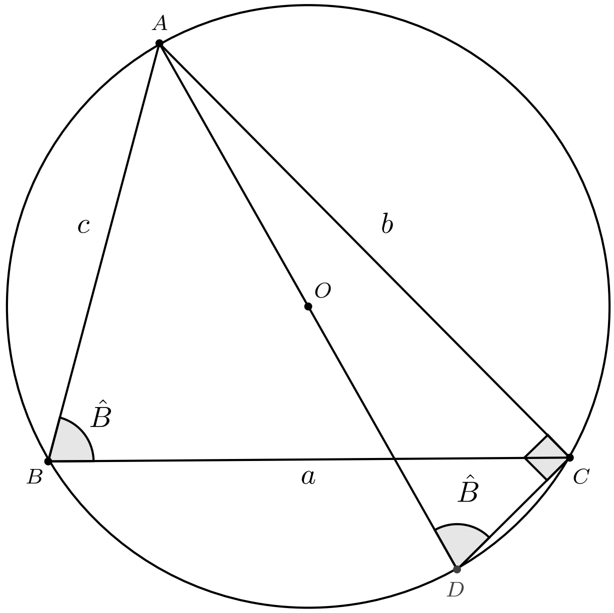
$$\tan 60^\circ = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}.$$

Usaremos, sem demonstração, no restante deste material que $\sin x = \sin(180^\circ - x)$ e $\cos x = -\cos(180^\circ - x)$.

Teorema 2. (Lei dos Senos) Seja ABC um triângulo tal que $BC = a$, $CA = b$ e $AB = c$. Seja R o raio da circunferência circunscrita. Então

$$\frac{a}{\sin\angle A} = \frac{b}{\sin\angle B} = \frac{c}{\sin\angle C} = 2R.$$

Demonstração.



Seja AD um diâmetro. É fácil ver que $\angle ABC = \angle ADC$. Assim, no triângulo ΔADC, $\sin\angle B = \dfrac{b}{2R} \Leftrightarrow \dfrac{b}{\sin\angle B} = 2R$. Analogamente,

$$\frac{a}{\sin\angle A} = \frac{c}{\sin\angle C} = 2R.$$

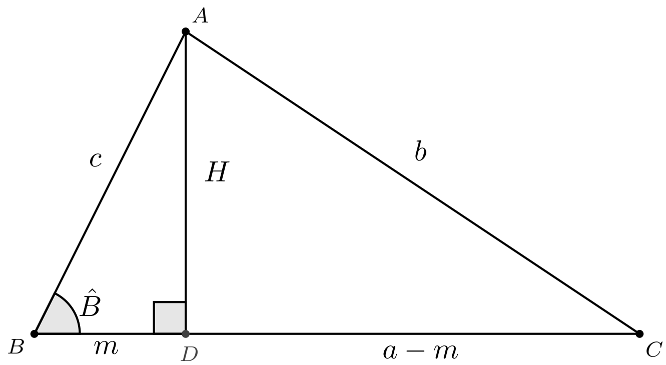
Finalmente,

$$\frac{a}{\sin\angle A} = \frac{b}{\sin\angle B} = \frac{c}{\sin\angle C} = 2R.$$

Teorema 3. (Lei dos Cossenos) Seja ABC um triângulo tal que $BC = a$, $CA = b$ e $AB = c$. Então,

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\angle A,$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\angle B,$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\angle C.$$

Demonstração.



Vamos fazer o caso em que o triângulo é acutângulo. O caso em que o triângulo é obtusângulo fica como exercício. Aplicando o teorema de Pitágoras nos triângulos ΔABD e ΔACD, temos:

$$c^2 = m^2 + H^2 \text{ e}$$

$$b^2 = (a-m)^2 + H^2 \Leftrightarrow$$

$$b^2 = a^2 - 2am + m^2 + H^2.$$

Assim, $b^2 = a^2 + c^2 - 2am$. Por outro lado, $\cos\angle B = \dfrac{m}{c} \Leftrightarrow m = c\cdot\cos\angle B$. Finalmente, $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\angle B$. Analogamente,

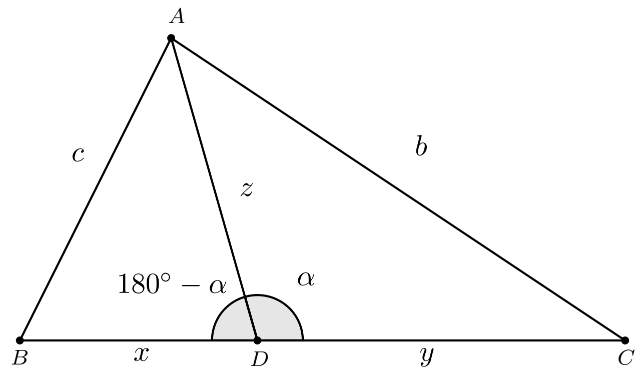
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\angle A \text{ e}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\angle C.$$

Teorema 4. (Stewart) Seja ABC um triângulo tal que $BC = a$, $CA = b$ e $AB = c$. Seja D um ponto sobre o lado BC tal que $BD = x$, $CD = y$ e $AD = z$. Então,

$$c^2y + b^2x - z^2a = axy.$$

Demonstração.



Aplicando a lei dos Cossenos nos triângulos ΔABD e ΔACD, temos

$$c^2 = x^2 + z^2 - 2xz\cos(180^\circ - \alpha) \Leftrightarrow$$

$$\frac{c^2}{x} = x + \frac{z^2}{x} - 2z\cos(180^\circ - \alpha). \ (1)$$

E

$$b^2 = y^2 + z^2 - 2yz\cos\alpha \Leftrightarrow$$

$$\frac{b^2}{y} = y + \frac{z^2}{y} - 2z\cos\alpha. \ (2)$$

Adicionando (1) e (2), encontramos

$$\frac{b^2}{y} + \frac{c^2}{x} = x + y + \frac{z^2}{y} + \frac{z^2}{x} \Leftrightarrow$$

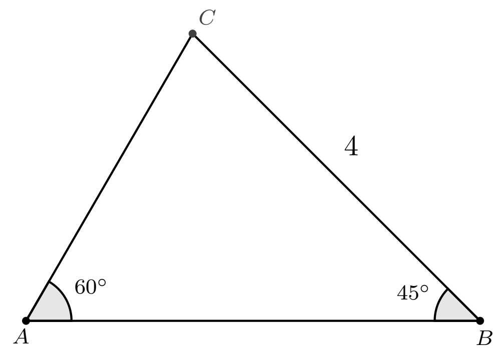
$$\frac{b^2}{y} + \frac{c^2}{x} = a + \frac{z^2}{y} + \frac{z^2}{x} \Leftrightarrow$$

$$c^2y + b^2x - z^2a = axy.$$

Exercícios resolvidos

1. Num triângulo ABC são dados $\angle A = 60^\circ$, $\angle B = 45^\circ$ e $BC = 4$ cm. Determine a medida de AC.

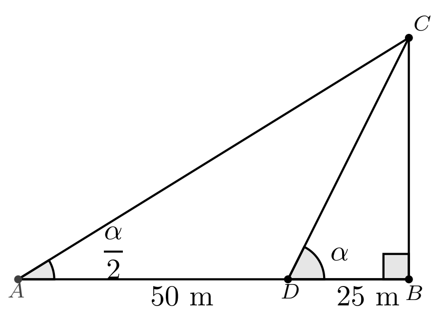
   Solução.



Aplicando a lei dos senos temos

$$\frac{BC}{\sin \angle A} = \frac{AC}{\sin \angle B} \Leftrightarrow$$
$$\frac{4}{\sin 60^\circ} = \frac{AC}{\sin 45^\circ} \Leftrightarrow$$
$$\frac{4}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{AC}{\frac{\sqrt{2}}{2}} \Leftrightarrow$$
$$AC = \frac{4\sqrt{6}}{3}.$$

2. (OCM) Um observador estando a 25 m de um prédio o visualiza sob um certo ângulo. Afastando - se, na direção perpendicular ao prédio mais 50 m o ângulo de visualização é a metade do anterior. Qual a altura do prédio?



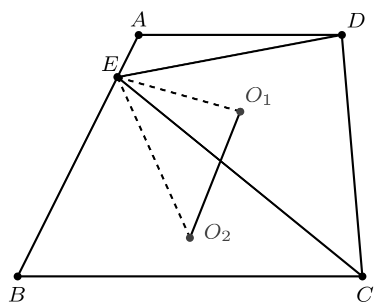
Solução.

É fácil ver que ΔADC é isósceles, ou seja, $AD = CD = 50$ m. Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo ΔBDC temos

$$CD^2 = BD^2 + BC^2 \Leftrightarrow 50^2 = 25^2 + BC^2 \Leftrightarrow BC = 25\sqrt{3}.$$

3. (China Western) Em um trapézio $ABCD$, $AD//BC$. Sejam E um ponto variando sobre o lado AB, O_1 e O_2 os circuncentros dos triângulos AED e BEC, respectivamente. Prove que o comprimento de O_1O_2 é fixo.

Solução.



É fácil ver que $\angle AEO_1 = 90^\circ - \angle ADE$ e $\angle BEO_2 = 90^\circ - \angle BCE$. Então,

$$\angle O_1EO_2 = \angle ADE + \angle ECB.$$

Como $AD \parallel BC$, construa uma paralela a AD, por E. Dessa forma $\angle DEC = \angle ADE + \angle BCE$, ou seja, $\angle O_1EO_2 = \angle DEC$. Usando lei dos senos, temos

$$\frac{DE}{EC} = \frac{2O_1E \sin\angle A}{2O_2E \sin\angle B} = \frac{O_1E}{O_2E}.$$

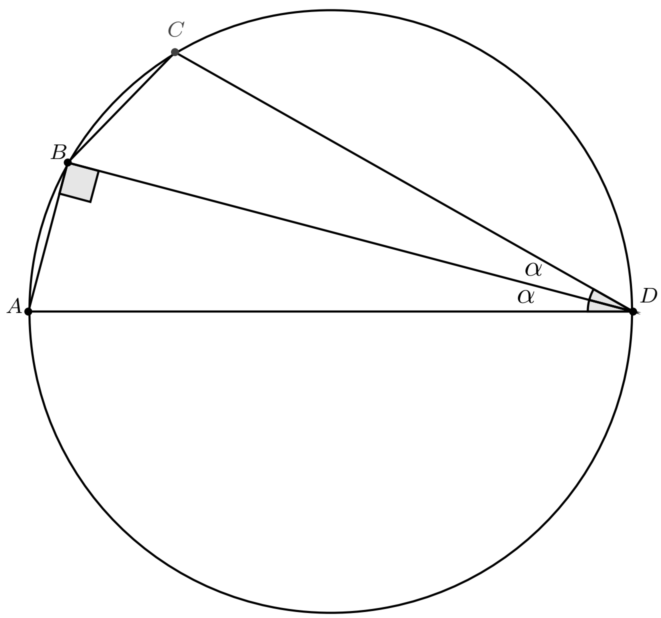
Assim, $\Delta DEC \sim \Delta O_1EO_2$. Portanto,

$$\frac{O_1O_2}{DC} = \frac{O_1E}{DE} = \frac{O_1E}{2O_1E\sin\angle A} = \frac{1}{2\sin\angle A}.$$

Portanto, $O_1O_2 = \dfrac{DC}{2\sin\angle A}$, que é um valor fixo.

4. Seja $ABCD$ um quadrilátero inscrito em uma circunferência de diâmetro AD. Se $AB = BC = 1$ e $AD = 3$, ache o comprimento da corda CD.

Solução.



Temos que $AD = 3$, $AB = BC = 1$. Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo ABD, temos

$$AD^2 = AB^2 + BD^2 \Leftrightarrow 3^2 = 1^1 + BD^2 \Leftrightarrow BD = 2\sqrt{2}.$$

Além disso, $\cos\alpha = \dfrac{BD}{AD} = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$. Aplicando a lei dos cossenos no triângulo BCD, temos

$$BC^2 = BD^2 + CD^2 - 2 \cdot BD \cdot CD \cos\alpha \Leftrightarrow$$

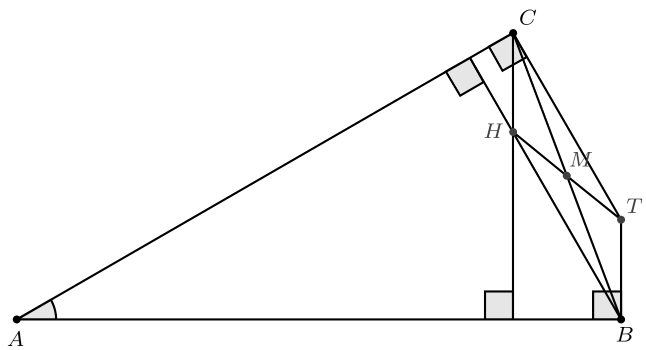
$$1^2 = 8 + CD^2 - 2 \cdot 2\sqrt{2} \cdot CD\frac{2\sqrt{2}}{3} \Leftrightarrow$$

$$CD = 3 \text{ ou } \frac{7}{3}.$$

Como o diâmetro mede 3, então $CD = \dfrac{7}{3}$.

5. (Teste de seleção do Brasil para a Cone Sul) Em um triângulo acutângulo ABC, $\angle A = 30^\circ$, H é seu ortocentro e M é o ponto médio de BC. Sobre a reta HM tomemos um ponto $T \neq H$ tal que $HM = MT$. Mostre que $AT = 2BC$.

Solução.



$HBTC$ é um paralelogramo pois M é o ponto médio de BC e $HM = MT$. Além disso, $BC \perp AC$ e $BH \parallel AC$, assim $CT \perp AC$, ou seja, $\angle TCA = \angle 90^\circ$. Com isso, T pertence à circunferência circunferência circunscrita a ABC e AT é diâmetro. Portanto,

$$AT = 2R = \frac{BC}{\sin \angle A} = \frac{BC}{\sin 30^\circ} = 2BC.$$

Exercícios propostos

1. (OCM) Se as diagonais de um quadrilátero (convexo) são perpendiculares, prove que as somas dos quadrados dos lados opostos são iguais.

2. (OCM) Dobra - se um pedaço de arame de 32 cm de comprimento formando um triângulo isósceles de 12 cm de base. Calcule a medida do comprimento da bissetriz do ângulo oposto à base.

3. (OBM) P é um ponto interior a um quadrado $ABCD$. As distâncias de P aos vértices A e D e ao lado BC são iguais a 10 cm. O lado do quadrado mede:
(a) 10 cm (b) 12 cm (c) 14 (d)16 cm (e) 18 cm

4. Um ponto P, interno de um ângulo de 60°, dista 6 m e 9 m dos lados desse ângulo. Qual a distância entre P e a bissetriz do ângulo?

5. Seja ABC um triângulo tal que $\angle ABC = 45^o$. Seja D o ponto sobre o segmento BC tal que $2BD = CD$ e $\angle DAB = 15^o$. Determine o ângulo $\angle ACB$.

6. (AIME) Seja ABC um triângulo tal que $AB = 13$, $BC = 15$ e $CA = 14$. Seja D o ponto do segmento BC tal que $CD = 6$. Seja E o ponto de BC tal que $CE > CD$ e $\angle BAE = \angle CAD$. Determine BE.

7. No triângulo ABC, $\angle BAC = 20^\circ$ e $AB = AC$. Os pontos M e N estão sobre os lados AB e AC, respectivamente, e são tais que $\angle BCM = 60^\circ$ e $\angle CBN = 50^\circ$. Calcule a medida do ângulo $\angle CMN$.

8. Em um triângulo ABC, $\angle BAC = 100^\circ$ e $AB = AC$. Seja BD a bissetriz de $\angle ABC$, com D sobre o lado AC. Prove que $AD + BD = BC$.

9. (Teste de seleção do Brasil para a IMO) Seja Γ uma circunferência de centro O tangente aos lados AB e AC do triângulo ABC nos pontos E e F. A reta perpendicular ao lado BC por O intersecta EF no ponto D. Mostre que A, D e M (ponto médio de BC) são colineares.

Bibliografia

1. 103 Trigonometry Problems - From the training of the USA IMO team
Titu Andreescu

2. Precalculus
Richard Rusczyk

3. Olimpíadas de Matemática 97
Antonio Caminha, Onofre Campos e Paulo Rodrigues

4. Olimpíadas Cearenses de Matemática, Ensino Fundamental, 1981 - 1985
Emanuel Carneiro, Francisco Antônio M. de Paiva e Onofre Campos.

5. Olimpíadas Cearenses de Matemática, Ensino Médio, 1981 - 1985
Emanuel Carneiro, Francisco Antônio M. de Paiva e Onofre Campos.