*lidade. Existe um critério por 7 bastante popular: Para saber se um inteiro é múltiplo de 7, basta apagar seu último dígito, multiplicá-lo por 2 e o subtrair do número que restou. Se o resultado é múltiplo de 7, então o número original também é múltiplo de 7.*

Podemos aplicar esse algoritmo sucessivas vezes até que o resultado obtido seja facilmente verificável como um múltiplo de 7. Por exemplo, para o número 561421 podemos escrever:

$$\begin{aligned} 56142 - 2 &= 56140 \\ 5614 - 0 &= 5614 \\ 561 - 8 &= 553 \\ 55 - 6 &= 49 \end{aligned}$$

Como 49 é múltiplo de 7, nosso número original também é. Por que esse processo funciona? Se o nosso número original está escrito na forma $10a + b$, então o número obtido após a operação descrita é $a - 2b$. Basta mostrarmos que se $7 \mid a - 2b$, então $7 \mid 10a + b$. Se $7 \mid a - 2b$, pela propriedade (i) do lema, concluímos que $7 \mid 10a - 20b$. Como $7 \mid 21b$, também temos que $7 \mid [(10a - 20b) + 21b] = 10a + b$.

**Exemplo 5.** *Mostre que se* $7 \mid 3a + 2b$ *então* $7 \mid 4a - 2b$.

Veja que $7 \mid 7a$ e $7 \mid 3a + 2b$, então $7 \mid [7a - (3a + 2b)] = 4a - 2b$. Na prática, o que fizemos foi multiplicar o número $3a + 2b$ por algum inteiro para posteriormente subtraímos um múltiplo de 7 conveniente e obtermos o número $4a - 2b$. Existem outras formas de fazermos isso. Observe os números $3 \cdot 0$, $3 \cdot 1$, $3 \cdot 2$, $3 \cdot 3$, $3 \cdot 4$, $3 \cdot 5$, $3 \cdot 6$. O número $3 \cdot 6$ deixa o mesmo resto que 4 por 7, pois $3 \cdot 6 = 7 \cdot 2 + 4$. Como $7 \mid 3a + 2b$ podemos concluir que $7 \mid (18a + 12b)$ e consequentemente $7 \mid [18a + (12b - 14a)] = 4a + 12b$. Mas $7 \mid 14b$, então $7 \mid [4a + 12b - 14b] = 4a - 2b$.

Para o próximo exemplo, o leitor precisará lembrar dos critérios de divisibilidade por 9 e 3 vistos na aula passada.

**Exemplo 6.** *Usando os dígitos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, construímos vários*

# Polos Olímpicos de Treinamento Intensivo (POTI)

## Curso de Teoria dos Números - Nível 2

## Aula 2 - Divisibilidade II

Prof. Samuel Feitosa

*Arquivo Original*[1]

[1]**Documento:** "…gaia/educacional/matematica/pot2tn02/Aula02-DivisibilidadeII.pdf".

# Sumário







# 1 Divisibilidade II

**Definição 1.** *Dados dois inteiros $a$ e $b$, com $a \neq 0$, dizemos que $a$ divide $b$ ou que $a$ é um divisor de $b$ ou ainda que $b$ é um múltiplo de $a$, e escrevemos $a \mid b$ se o $r$ obtido pelo algoritmo de divisão aplicado à $a$ e $b$ é 0, ou seja, se $b = aq$ para algum inteiro $q$.*

**Lema 2.** *Sejam $a$, $b$, $c$, $d$ inteiros. Temos*

*i) ("$d$ divide") Se $d \mid a$ e $d \mid b$, então $d \mid ax + by$ para quaisquer $x$ e $y$ inteiros.*

*ii) ("Limitação") Se $d \mid a$, então $a = 0$ ou $\mid d \mid \leq \mid a \mid$.*

*iii) (Transitividade) Se $a \mid b$ e $b \mid c$, então $a \mid c$.*

Em particular, segue da propriedade i) que $d \mid a + b$ e $d \mid a - b$.

**Exemplo 3.** *(Olimpíada de Maio 2006) Encontre todos os naturais $a$ e $b$ tais que $a \mid b + 1$ e $b \mid a + 1$.*

Pela propriedade da Limitação, temos $a \leq b + 1$ e $b \leq a + 1$. Daí, $a - 1 \leq b \leq a + 1$.

Vejamos os casos:

(i) $a = b$. Como $a \mid b + 1$ e $a \mid b$ (pois $b = a$) temos que $a \mid [(b + 1) - b] = 1$. Assim, $a = 1$. Nesse caso, só temos a solução $(a, b) = (1, 1)$

(ii) $a = b + 1$. Como $b \mid a + 1$ e $b \mid a - 1$ (pois $b = a - 1$) temos que $b \mid [(a + 1) - (a - 1)] = 2$. Assim, $b = 1$ ou $b = 2$ e nesse caso, só temos as soluções (3, 2) e (2, 1).

(iii) $a = b - 1$. Esse caso é análogo ao anterior e as soluções para $(a, b)$ são (1, 2) e (2, 3).

**Exemplo 4.** *(Critério de Divisibilidade por 7) Existem alguns métodos práticos para decidirmos se um número é múltiplo de outro. Certamente o leitor já deve ter se deparado com algum critério de divisibi-*

## 1.2 Dicas e Soluções

**11.** Como $3 \mid 6b$, segue que $3 \mid [(a+7b)-6b] = a+b$.

**12.** Como $7 \mid a+3b$, segue que $7 \mid 13a+39b = (13a+11b)+28b$. Mas $7 \mid 28b$, portanto $7 \mid [(13a+11b)+28b-28b] = 13a+11b$.

**13.** Como $19 \mid 3x+7y$, segue que $19 \mid 27(3x+7y) = (43x+75y)+(38x+114y)$. Mas $19 \mid 19(2x+6y)$, portanto $19 \mid [(43x+75y)+(38x+114y)-19(2x+6y)] = 43x+75y$.

**14.** Como $17 \mid 3a+2b$, segue que $17 \mid 27a+18b = (10a+b)+17(a+b)$.

**16.** Veja que

$$\frac{n^k-1}{(n-1)^2} = \left(\frac{n^{k-1}-1}{n-1} + \frac{n^{k-2}-1}{n-1} + \ldots + \frac{n-1}{n-1} + \frac{k}{n-1}\right)$$

Como os números $\dfrac{n^l-1}{n-1}$ sempre são inteiros, o número do lado esquerdo da equação será inteiro se, e somente se, o número $\dfrac{k}{n-1}$ for inteiro.

**17.** Comece dividindo o problema quando em dois casos: $n$ é par ou $n$ é ímpar. Sabemos que $1+2+\ldots+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$. Para $n$ ímpar, basta mostrar que o número em questão é divisível por $n$ e $\dfrac{n+1}{2}$. O próximo passo é lembrar do problema 33 da aula 1. Pela fatoração de $x^n+y^n$, temos que $i^k+(n-i)^k$ é divisível por $n$. Faça outros tipos de pares para mostrar a divisibilidade por $\dfrac{n}{2}$. O caso quando $n$ é par é análogo.

**18.** Veja que $X = 10^3 \cdot \overline{abc} + \overline{def} = 1001\overline{abc} - (\overline{abc} - \overline{def})$. Como 1001 é múltiplo de 7, concluímos que $X$ é a soma de dois múltiplos de 7.



*números de sete dígitos distintos. Existem dois deles, distintos, tais que um divide o outro?*

Não. Suponha, por absurdo, que $m < n$ sejam dois desses números, com $m \mid n$. Claramente $m \mid n-m$ e $9 \mid n-m$, pois $n$ e $m$ possuem a mesma soma dos dígitos e consequentemente possuem o mesmo resto na divisão por 9. Por outro lado, sabemos a soma dos dígitos de $m$: $1+2+\cdots+7 = 3\cdot 9+1$. Daí, $m$ não possui fator 9 e podemos garantir que $9m \mid n-m$. Mas então $9m \leq n-m \Rightarrow 10m \leq n \Rightarrow n$ tem pelo menos oito dígitos, uma contradição.

**Exemplo 7.** *(Leningrado 1989) Seja $A$ um número natural maior que 1, e seja $B$ um número natural que é um divisor de $A^2+1$. Prove que se $B-A>0$, então $B-A>\sqrt{A}$.*

Seja $B-A=q$. Assim, $A+q \mid A^2+1$. Como $(A-q)(A+q) = A^2-q^2$ é divisível por $A+q$, podemos concluir que $A+q \mid [(A^2+1)-(A^2-q^2)] = q^2+1$. Pela propriedade de limitação, $A+q \leq q^2+1$. Nessa desigualdade, não podemos ter $q=1$ pois $A>1$. Usando então que $q>1$, temos $A \leq q^2-q+1 < q^2$, ou seja, $\sqrt{A} < q$.

**Problema 8.** *(AIME 1986) Qual é o maior inteiro $n$ para o qual $n^3+100$ é divisível por $n+10$?*

Para achar explicitamente o quociente de $n^3+100$ por $n+10$ podemos fazer uso de alguma fatoração. Utilizaremos a soma dos cubos $n^3+10^3 = (n+10)(n^2-10n+100)$. Como,

$$n^3+100 = (n+10)(n^2-10n+100) - 900,$$

podemos concluir que o número 900 deve ser múltiplo de $n+10$. O maior inteiro $n$ para o qual $n+10$ divide 900 é 890. Veja que se $n=890$, o quociente da divisão de $n^3+100$ por $n+10$ é $n^2-10n+100-1 = 890^2 - 10\cdot 890 + 99$.

**Exemplo 9.** *(Extraído de [1]) Encontre todos os inteiros positivos $n$*

*tais que* $2n^2+1 \mid n^3+9n-17$.

Utilizando o "$2n^2+1$ divide" para reduzir o grau de $n^3+9n-17$, temos que

$$\begin{cases} 2n^2+1 & \mid n^3+9n-17 \\ 2n^2+1 & \mid 2n^2+1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \Longrightarrow 2n^2+1 &\mid (n^3+9n-17)\cdot 2+(2n^2+1)\cdot(-n) \\ \Longleftrightarrow 2n^2+1 &\mid 17n-34 \end{aligned}$$

Como o grau de $17n-34$ é menor do que o de $2n^2+1$, podemos utilizar a "limitação" para obter uma lista finita de candidatos a $n$. Temos $17n-34=0 \iff n=2$ ou $|\ 2n^2+1\ | \leq |\ 17n-34\ | \iff n=1$, 4 ou 5. Destes candidatos, apenas $n=2$ e $n=5$ são soluções.

**Exemplo 10.** *(Leningrado 1990) Sejam* $a$ *e* $b$ *números naturais tais que* $b^2+ba+1$ *divide* $a^2+ab+1$. *Prove que* $a=b$.

Pela propriedade de limitação, $b^2+ba+1 \leq a^2+ab+1$ e daí $b \leq a$. Além disso, $b^2+ab+1 > a-b$. A igualdade $b(a^2+ab+1)-a(b^2+ba+1)=b-a$ implica que $a-b$ é divisível por $b^2+ba+1$. Se $a-b \neq 0$, então $b^2+ab+1 \leq a-b$. Mas isso é um absurdo, logo $a-b=0$.

## 1.1 Problemas Propostos

**Problema 11.** *Mostre que se* $3 \mid a+7b$ *então* $3 \mid a+b$.

**Problema 12.** *Mostre que se* $7 \mid a+3b$ *então* $7 \mid 13a+11b$

**Problema 13.** *Mostre que se* $19 \mid 3x+7y$ *então* $19 \mid 43x+75y$

**Problema 14.** *Mostre que se* $17 \mid 3a+2b$ *então* $17 \mid 10a+b$



**Problema 15.** *Encontre todos os inteiros positivos* $n$ *tais que* $n+2009$ *divide* $n^2+2009$ *e* $n+2010$ *divide* $n^2+2010$.

**Problema 16.** *Seja* $n>1$ *e* $k$ *um inteiro positivo qualquer. Prove que* $(n-1)^2 \mid (n^k-1)$ *se, e somente se ,* $(n-1) \mid k$.

**Problema 17.** *(OBM 2005) Prove que a soma* $1^k+2^k+\ldots+n^k$, *onde* $n$ *é um inteiro e* $k$ *é ímpar, é divisível por* $1+2+\ldots+n$.

**Problema 18.** *O número de seis dígitos* $X=\overline{abcdef}$ *satisfaz a propriedade de que* $\overline{abc}-\overline{def}$ *é divisível por 7. Prove que* $X$ *também é divisível por 7.*

**Problema 19.** *(Bielorússia 1996) Inteiros* $m$ *e* $n$, *satisfazem a igualdade*

$$(m-n)^2=\frac{4mn}{m+n-1}$$

*a) Prove que* $m+n$ *é um quadrado perfeito.*

*b) Encontre todos os pares* $(m, n)$ *satisfazendo a equação acima.*

**Problema 20.** *(Olimpíada de Leningrado) Os números naturais* $a$, $b$ *e* $c$ *têm a propriedade que* $a^3$ *é divisível por* $b$, $b^3$ *é divisível por* $c$ *e* $c^3$ *é divisível por* $a$. *Prove que* $(a+b+c)^{13}$ *é divisível por* $abc$.

**Problema 21.** *(OBM 2000) É possível encontrar duas potências de 2, distintas e com o mesmo número de algarismos, tais que uma possa ser obtida através de uma reordenação dos dígitos da outra? (Dica: Lembre-se do critério de divisibilidade por 9)*

**Problema 22.** *(IMO 1998) Determine todos os pares de inteiros positivos* $(x, y)$ *tais que* $xy^2+y+7$ *divide* $x^2y+x+y$.

**19.** Somando $4mn$ em ambos os lados, obtemos:

$$\begin{aligned}(m+n)^2 &= \frac{4mn}{m+n-1}+4mn\\ &= \frac{4mn(m+n)}{m+n-1}\Rightarrow\\ (m+n) &= \frac{4mn}{m+n-1}\\ &= (m-n)^2\end{aligned}$$

Assim, $m+n$ é o quadrado de um inteiro. Se $m-n=t$, então $m+n=t^2$ e $(m,\, n)=(\frac{t^2+t}{2},\, \frac{t^2-t}{2})$. É fácil verificar que para qualquer $t$ inteiro esse par é solução do problema.

**20.** Analise a expansão pelo binômio de Newton.

**21.** Não. Suponha, por absurdo, que existam duas potências de 2, $2^m < 2^n$, satisfazendo o enunciado. Como $2^n$ é um múltiplo de $2^m$, podemos ter: $2^n = 2\cdot 2^m,\ 4\cdot 2^m,\ 8\cdot 2^m, \ldots$. Além disso, como ambos possuem a mesma quantidade de dígitos, temos $1 < \frac{2^n}{2^m} < 10$. Assim, as únicas possibilidade são $2^n = 2\cdot 2^m,\ 4\cdot 2^m,\ 8\cdot 2^m$. Pelo critério de divisibilidade por 9, como $2^m$ e $2^n$ possuem os mesmos dígitos, podemos concluir que $2^n - 2^m$ é um múltiplo de 9. Entretanto, nenhuma das possibilidade anteriores satisfaz essa condição e chegamos em um absurdo.

**22.** Começaremos usando a idéia do exemplo 10. A igualdade $y(x^2y+x+y)-x(xy^2+y+7)=y^2-7x$ implica que $y^2-7x$ é divisível por $xy^2+y+7$. Se $y^2-7x\geq 0$, como $y^2-7x<xy^2+y+7$, segue que $y^2-7x=0$. Assim, $(x,\, y)=(7t^2,\, 7t)$ para algum $t\in\mathbb{N}$. É fácil checar que esses pares são realmente soluções. Se $y^2-7x<0$, então $7x-y^2>0$ é divisível por $xy^2+y+7$. Daí, $xy^2+y+7\leq 7x-y^2<7x$, que nos permite concluir que $y\leq 2$. Para $y=1$, temos $x+8 \mid 7x-1$ e consequentemente $x+8 \mid 7(x+8)-(7x-1)=57$. Então as únicas possibilidades são $x = 11$ e $x = 49$, cujos pares correspondentes são $(11, 1)$, $(49, 1)$. Para $y = 2$, temos $4x+9 \mid 7x-4$ e consequentemente $7(4x + 9) - 4(7x - 4) = 79$ é divisível por $4x + 9$. Nesse caso, não obtemos nenhuma solução nova. Todas as soluções para $(x, y)$ são: $(7t^2, 7t)(t \in \mathbb{N})$, $(11, 1)$ e $(49, 1)$.

## 1.3 Referências

# Referências


[1] F. E. Brochero Martinez, C. G. Moreira, N. C. Saldanha, E. Tengan - Teoria dos Números um passeio com primos e outros números familiares pelo mundo inteiro, Projeto Euclides, IMPA, 2010.

[2] E. Carneiro, O. Campos and F. Paiva, Olimpíadas Cearenses de Matemática 1981-2005 (Níveis Júnior e Senior), Ed. Realce, 2005.

[3] S. B. Feitosa, B. Holanda, Y. Lima and C. T. Magalhães, Treinamento Cone Sul 2008. Fortaleza, Ed. Realce, 2010.

[4] D. Fomin, A. Kirichenko, Leningrad Mathematical Olympiads 1987-1991, MathPro Press, Westford, MA, 1994.

[5] D. Fomin, S. Genkin and I. Itenberg, Mathematical Circles, Mathematical Words, Vol. 7, American Mathematical Society, Boston, MA, 1966.

[6] I. Niven, H. S. Zuckerman, and H. L. Montgomery, An Introduction to the Theory of Numbers.