Programa Olímpico de Treinamento

Curso de Geometria - Nível 2

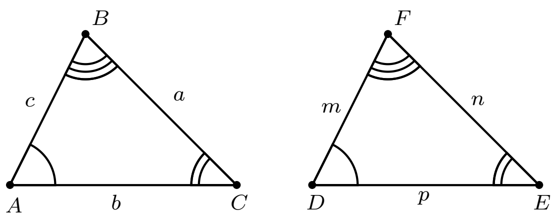
Prof. Rodrigo Pinheiro

Aula 2

Congruência de triângulos

Definição: Um triângulo é congruente a outro se, e somente se, é possível estabelecer uma correspondência entre seus vértices de modo que:

1. Seus lados são ordenadamente congruentes aos lados do outro e
2. Seus ângulos são ordenadamente congruentes aos ângulos do outro.

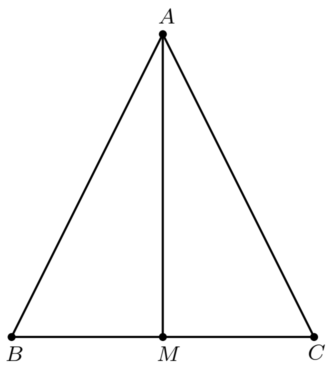


Notação:

$$\triangle ABC \equiv \triangle DFE \iff \begin{bmatrix} \angle A & = & \angle D & & a & = & n \\ \angle B & = & \angle F & \text{e} & b & = & p \\ \angle C & = & \angle E & & c & = & m \end{bmatrix}$$

Teorema 1. Dois lados de um triângulo são congruentes se,e somente se os ângulos opostos a estes lados são congruentes.

Demonstração.

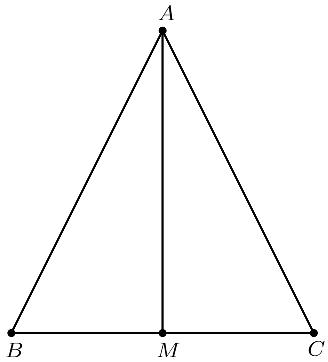


($\Rightarrow$) Seja ABC um triângulo com $AB = AC$ e M o ponto médio do lado BC. Observe que $\triangle ABM \equiv \triangle AMC$, pelo caso LLL, portanto $\angle ABC = \angle ACB$.

($\Leftarrow$) Seja ABC um triângulo com $\angle ABC = \angle ACB$ e M o pé da altura relativa a BC. Como $\angle AMB = \angle AMC = 90°$ e $\angle ABC = \angle ACB$, temos então que $\angle MAB = \angle MAC$ pois a soma dos ângulos internos de um triângulo interno é sempre $180°$. Concluímos assim que $\triangle AMB \equiv \triangle AMC$ pelo caso ALA, consequentemente, $AB = AC$.

Teorema 2. Em todo triângulo isósceles, a altura, mediana e bissetrizes relativas à base são coincidentes.

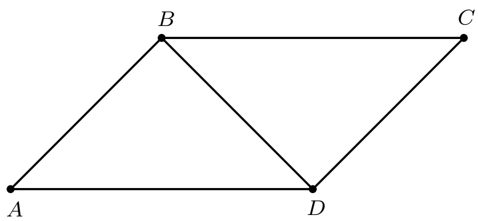
Demonstração.



Seja ABC um triângulo com $AB = AC$ e M o ponto médio do lado BC. Observe que $\triangle ABM \equiv \triangle AMC$, pelo caso LLL, portanto $\angle AMB = \angle AMC$ e $\angle BAM = \angle CAM$, por definição temos então que AM também é bissetria. Como $\angle AMB + \angle AMC = 180°$ e $\angle AMB = \angle AMC$, então $\angle AMB = \angle AMC = 90°$, concluindo assim que AM também é altura.

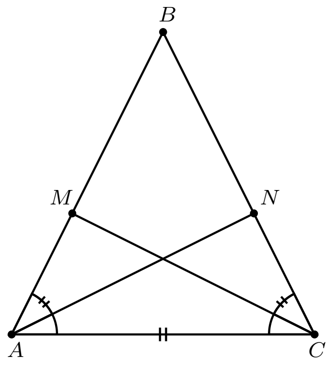
Teorema 3. Seja $ABCD$ um polígono convexo, demonstre que se dois lados opostos são iguais e paralelos, então $ABCD$ é um paralelogramo.

Demonstração. Suponhamos que $AB = CD$ e $AB \backslash\backslash CD$. Pela propriedade de paralelismo, temos que: $\angle ABD = \angle BDC$, concluindo assim que $\triangle ABD \equiv \triangle CDB$. Daí, tiramos que $\angle DBC = \angle BDA$, pela propriedade de paralelismo podemos concluir que $BC \setminus \backslash AD$, isto é, $ABCD$ é um paralelogramo.



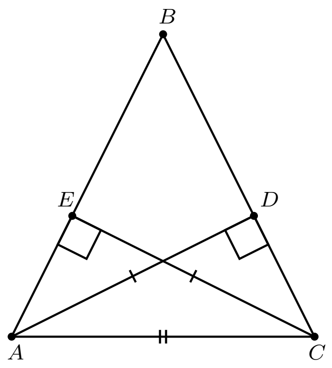
Problema 1. Dado um triângulo ABC, onde $AB = BC$. Tomam-se dois pontos M e N em AB e BC, respectivamente. Demonstre que se $\angle MCA = \angle NAC$, então $AM = CN$.

Solução.

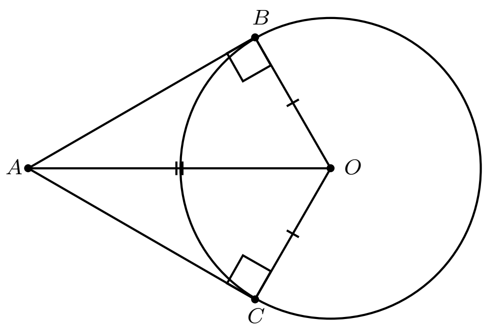


Dado que o triângulo é isósceles, temos que: $\angle MAC = \angle NCA$, portanto concluímos que $\triangle MAC \equiv \triangle NCA$, daí tiramos que $MA = NC$.

Problema 2. Mostre que se um triângulo possui duas altura iguais, então o triângulo é isósceles.
Solução. Seja ABC um triângulo onde as alturas AD e CE têm o mesmo comprimento. Pelo caso especial de congruência temos que $\triangle AEC \equiv \triangle ADC$, portanto $\angle EAC = \angle DCA$, isto é, $\triangle ABC$ isósceles.



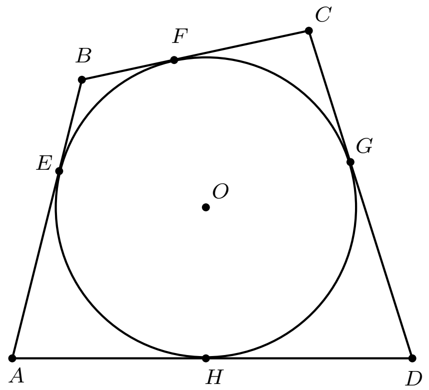
Problema 3. Demonstre que se duas retas AB e AC são duas retas tangentes a um circunferência de centro O /nos pontos B e C, respectivamente, então $AB = AC$ e $\angle OAB = \angle OAC$.
Solução.



Observe que $BO = OC$ e AO pertence ao dois triângulos ABO e ACO, então pelo caso especial de congruência $\triangle ABO \equiv \triangle ACO$, assim $AB = AC$ e $\angle OAB = \angle OAC$.

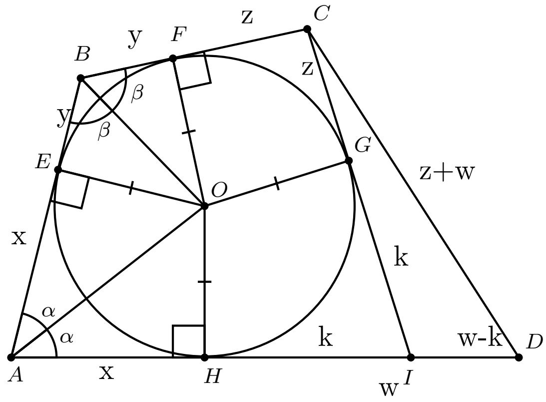
Problema 4. (Teorema de pitot) Mostre que um quadrilátero pode ser circunscrito a uma circunferência se, e somente se, a soma de dois lados opostos for igual à soma dos outros dois lados.

Solução. ($\Rightarrow$) Suponha que o quadrilátero $ABCD$ seja circunscrito a uma circunferência, e os pontos de tangência da circunferência com os lados sejam E, F, G, H, como mostra a figura abaixo.



Pelo problema anterior, vemos que: $AH = AE$; $BE = BF$; $CF = CG$; $GD = HD$. Portanto, $AE + BE + CG + GD = BF + CF + +HD + AH$, isto implica dizer que: $AB + CD = BC + AD$.

($\Leftarrow$) Suponha que $ABCD$ seja um quadrilátero tal que $AB + CD = BC + AD$ e não seja circunscritível.

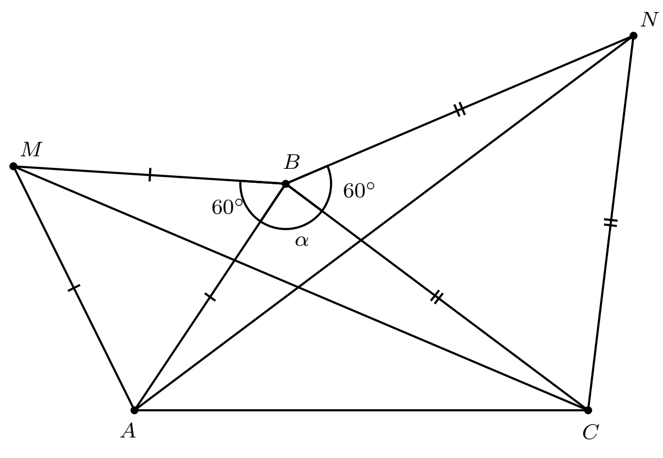


Sejam AO e BO as bissetrizes internas dos ângulos $\angle DAB$ e $\angle ABC$. Tomamos E, F e H como sendo os pés das alturas de O aos lados AB, BC e AD, respectivamente. Pelo caso especial de congruência temos que $\triangle AOH \equiv \triangle AOE$ e $\triangle BOE \equiv \triangle BOF$, assim sendo, $AE = AH = x$ e $BE = BF = y$. Defina $CF = z$ e $HD = w$. Pela hipótese, temos que:

$$(x + y) + CD = (y + z) + (x + w) \Rightarrow CD = z + w$$

Como CD não é tangente à circunferência pois, caso contrário, o quadrilátero seria circunscritível. Tomamos G tal que CG seja tangente a circunferência e defina $CG \cap AD = I$, perceba que pelo problema anterior, temos: $CG = CF = z$ e $GI = HI = k$. Dessa maneira, $ID = w - k$, mas analisando o triângulo CID isso é um absurdo pois $CI + ID = CD$ e CID é um triângulo. Então se a soma dos lados opostos de um quadrilátero forem iguais, então ele será circunscritível.

Problema 5. São construídos exteriormente ao $\triangle ABC$, os triângulos equiláteros ABM, BCN, ACP. Prove que $NA = BP = CM$.
Solução.



Primeiramente, construímos somente os triângulos equiláteros ABM e BCN. Dessa forma, temos que: $AB = MB$ e $BC = BN$ e $\angle MBA = \angle CBN = 60°$. Assim sendo, temos que $\triangle MBC \equiv \triangle ABN$ pelo caso LAL, pois $AB = MB$; $BC = BN$ e $\angle MBA = \angle CBN$, portanto $AN = CM$. Analogamente, provamos que $AN = CM = BP$.

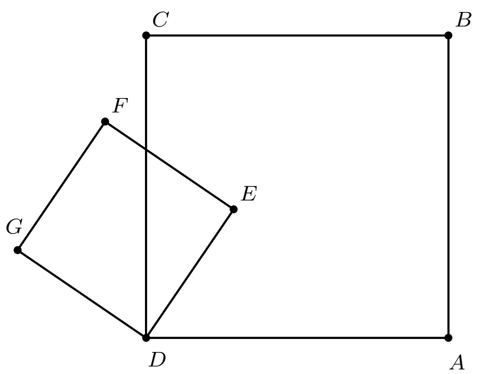
Problemas Propostos

Problema 6. $ABCD$ é um paralelogramo e ABF e ADE são triângulos equiláteros construídos exteriormente ao paralelogramo. Prove que FCE também é equilátero.

Problema 7. Quatro quadrados são construídos exteriormente nos lados de um paralelogramo. Mostre que os centros destes quadrados também formam um quadrado

Problema 8. Um hexágono convexo $ABCDEF$ está circunscrito a uma circunferência. Mostre que $AB + CD + EF = BC + DE + FA$.

Problema 9. Na figura, $ABCD$ e $AEFG$ são quadrados. Mostre que $BE = DG$.



Problema 10. (Rússia 1946) Dados três pontos A, B, C sobre uma reta l, são construídos triângulos equiláteros ABC_1 e BCA_1 em um mesmo semi-plano com respeito a l. Se M, N são os pontos médios de AA_1, CC_1, respectivamente, mostre que o triângulo BMN é equilátero.

Problema 11. (Inglaterra/95) Seja ABC um triângulo retângulo em C. As bissetrizes internas de BAC e ABC encontram BC e CA em P e Q, respectivamente. Sejam M e N os pés das perpendiculares a partir de P e Q até AB, respectivamente. Encontre a medida do ângulo MCN

Problema 12. (Polônia/92) Os segmentos AC e BD intersectam-se no ponto P de modo que $PA = PD$, $PB = PC$. Seja O o circucentro do triângulo PAB. Prove que as retas OP e CD são perpendiculares.

Problema 13. Prove que se em um triângulo ABC, a mediana AM é tal que $\angle BAC$ é dividido na razão $1 : 2$, e D está sobre AM, com M entre A e D, tal que $\angle DBA = 90°$, então $AC = \frac{AD}{2}$. **Dica:** Escolha P sobre AD tal que $AM = MP$.

Problema 14. Em um quadrado $ABCD$, M é o ponto médio de AB. Uma reta perpendicular a MC em M toca AD em K. Prove que $\angle BCM = \angle KCM$.

Problema 15. Dado um quadrado $ABCD$ com $\angle EDC = \angle ECD = 15°$, prove que $\triangle ABE$ é equilátero.

Problema 16. Dado um triângulo qualquer ABC, D, E e F são pontos médios dos lados AC, AB e BC, respectivamente. Sendo BG a altura do triângulo ABC. Prove que $\angle EGF = \angle EDF$.

Problema 17. (congruencia) No losango $ABCD$ com $\angle BAD = 60°$, tomamos pontos F, H e G nos lados AD, DC e na diagonal AC, respectivamente, de modo que $DFGH$ seja um paralelogramo. Prove que o triângulo BFH é equilátero.

Problema 18. (congruência) Seja $ABCD$ um paralelogramo. A bissetriz de $\angle BAD$ corta BC em M e o prolongamento de CD em N. Se O é o circuncentro do triângulo MCN, mostre que B, O, C, D são concíclicos.

Problema 19. (congruencia) Sejam ABC um triângulo, D um ponto sobre o prolongamento da semi-reta BC a partir de B tal que $BD = BA$ e M o ponto médio de AC. A bissetriz do ângulo $\angle ABC$ corta DM em P. Mostre que $\angle BAP = \angle ACB$.

Problema 20. (congruencia) Seja $ABCDE$ um pentágono com $AE = ED$, $AB+CD = BC$ e $\angle BAE + \angle CDE = 180°$. Prove que $\angle AED = 2\angle BEC$.

Problema 21. (Congruencia) Sejam ABC um triângulo de circuncírculo ω_1, O o circuncentro de ABC e ω_2 o ex-incírculo relativo ao lado BC. Se M, N, L são os pontos de tangência de ω_2 com as retas BC, AC, AB e os raios de ω_1 e ω_2 são iguais, mostre que O é o ortocentro do triângulo MNL.